



TITLE:

楕円柱の自励回転(ナビエ・ストークスの方程式の解)

AUTHOR(S):

井筒, 直樹; 大島, 裕子

CITATION:

井筒, 直樹 ...[et al]. 楕円柱の自励回転(ナビエ・ストークスの方程式の解). 数理解析研究所講究録 1983, 477: 229-244

ISSUE DATE:

1983-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/103327>

RIGHT:

楕円柱の自励回転

東 大・工 井筒 直樹

お茶の水大・理 大島 裕子

(Izutsu Naoki, Oshima Yuko)

1. はじめに

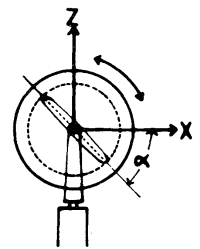
風にそよぐ木の葉やはためく旗などの流れによる自励振動は日常よく見られる現象である。また風車や風盃型風力計は一方方向にのみ回転するように設計された機械であるが、特に回転するように設計されていない対称物体でもその対称軸の回りに安定した自励回転を起こすことがある。カードを落とすときくるくるとまわりながら斜めの方向にゆっくりと落ちていくのはその例である。このような対称物体の自励回転現象については古くから多くの研究者によって研究が行われてきたが、自励回転による風力エネルギーの採取、あるいはこれによる飛翔体の不安定運動に関連してこの問題が最近新しく注目されるようになった。ここでは二次元楕円柱が主流と直角に保持され、その中心母線を軸として回転する場合の流れ場の観測、測定を行うとともに、渦系近似法による数値解析

を行った。

2. 実験装置

風洞 宇宙科学研究所の測定部径 1.6 m の変圧風洞を
一様流速 $U_0 = 7 \sim 42 \text{ m/s}$ で使用した。

模型 コード長 $C = 15 \text{ cm}$ 、スパン 45 cm 、厚み比 15% の
木製楕円柱模型をその中心母線を軸としてボールベアリング
を用いて自由に回転できるように支持台に、両側に端板とし
ての直径 20 cm のアクリル製円板とともにとりつけた。第 1 図
のように模型の中心線を原点、一様流の方
向を X 軸、垂直上向きに Z 軸の座標をとり
回転角 α は XZ 面で水平状態を 0 として時
計回り方向を正とした。流れは二次元で Y
方向の変化はないものとする。この模型を 第 1 図 座標
自励回転状態とろれと異なる種々の回転数
でパルスモーターで駆動した強制回転状態での測定を行った。



回転数 レーザーとフォトランジスタを模型の両側
で組みあわせて、翼の回転によってさえぎられた光のパルス
を周波数カウンタで測定した。

流れの可視化 長さ 40 cm、 $0.2 \text{ mm}\phi$ の 9 本のニクロム線
を模型の上流 $X = -30 \text{ cm}$ のところに Z 方向に 5 cm おきに Y 軸
と平行にはり、流動パラフィンを塗付、通電によって煙を発

生させる。スモークワイヤ法で流れ場を可視化し、回転数測定用のパルスと同期して発生させたストロボ光で写真撮影した。すなわち撮影された写真は、連続回転している楕円柱のある位相角度における流れ場の多重露光写真である。

熱線流速計 I型及びX型熱線流速計により後流内の $X=16\text{ cm}$ の断面を3方向にトラバースし、平均流速及び流速変動を測定した。

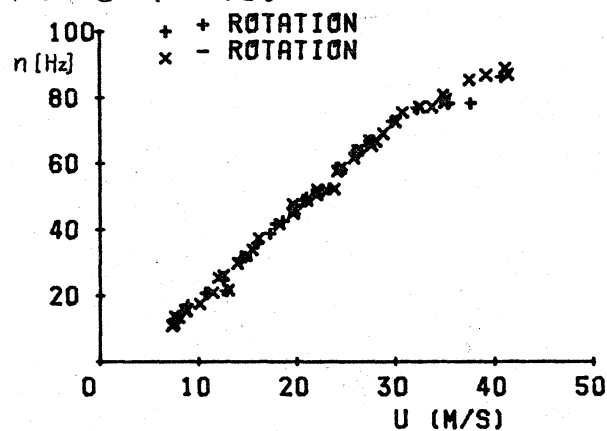
三分力バランス 支持台を三分力バランスに接続し、揚力、抵抗、モーメントを測定した。

パルスモーター 楕円柱を任意の一定回転数で強制的に回転させるために軸をトルク変換器を通してパルスモーターに接続してその際のトルクを測定した。

マイクロコンピュータシステム 各測定のコントロール及びデータの収集、処理にはマイクロコンピュータ Apple II を中心としたシステムを用いた。

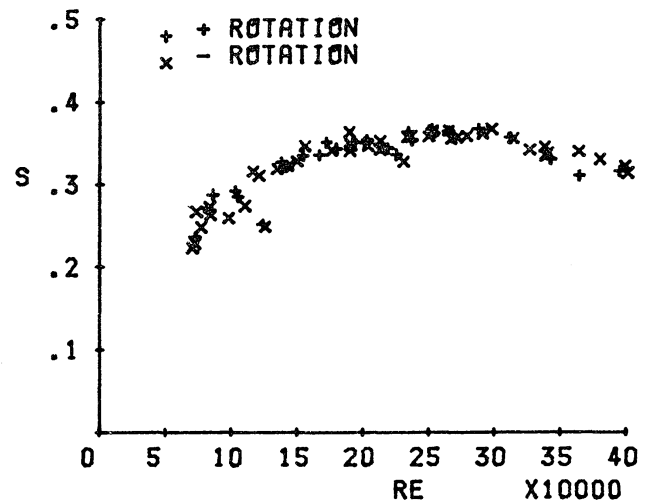
3. 実験結果

自励回転数 模型を一樣流中におくと流れに直角な位置で静止するが、わずかに回転を与えると自励回転を継続する。一樣流の



第2図 回転数～一樣流速

速度に対する自励回転数
の変化を第2図に示す。
一様流速の増加とともに
自励回転数 n も増加し、
その値は回転方向にはよ
らない。これを無次元回
転数 $S = nC/U_0$ とレイノ

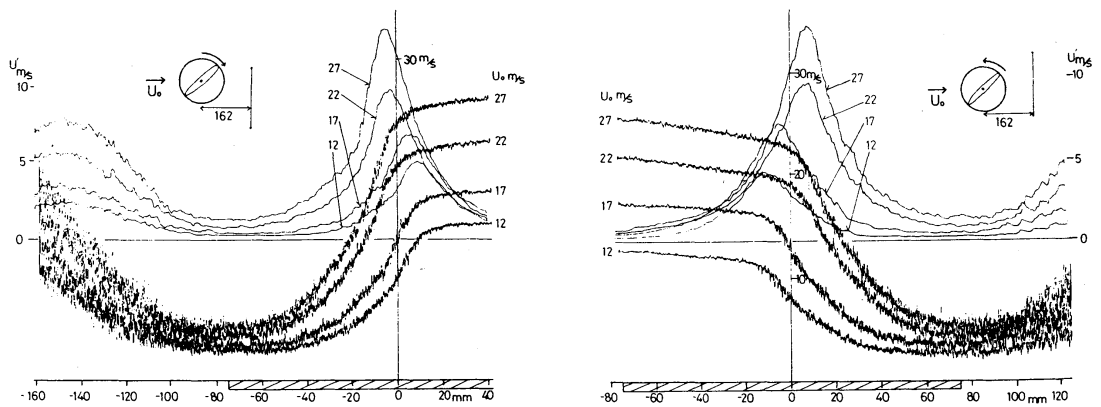


第3図 無次元回転数 $\sim Re$

ルズ数 $Re = U_0 C / \nu$ で表し

たのが第3図である。レイノルズ数 1.5×10^5 以上で S はほぼ
一定値0.36を示すが流速の低いところでは S も小さくなる傾
向があり $U_0 = 10 \text{ m/s}$ で $S = 0.29$ となる。

流速測定 時計方向回転の場合、楕円柱の上側つまり
翼端が後退する側では流れが加速され、下側つまり翼端が前
進する側では減速され、したがって後流は下側に偏る。この
ことは第4図に示した熱線流速計による平均流速分布より明



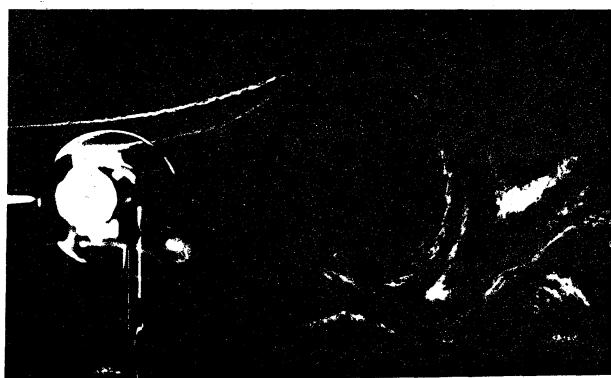
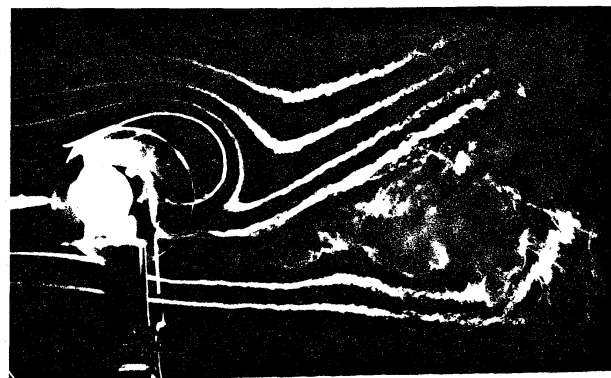
第4図 流速・変動の記録 (左: 正回転 右: 負回転)

らからである。これは自励回転している橋脚柱の下流 $X = 16 \text{ cm}$ の断面での、流速の回転による周期的変化の時間平均とろの平均自乗偏差すなわち流速変動を示したもので、正負の回転の方向によって X 軸に対して上下対称な分布をしていることから、回転の方向による差異はないことがわかる。流速変動は平均流速が急に減る肩の部分で大きい。正回転では上側、負回転では下側、すなわち翼端が後退する側で流速変動が大きく、反対側では乱れが大きいことがわかる。

流れの可視化 第5図はスモークワイヤ法によって流れ場を可視化した写真で、一様流速 $U_0 = 10 \text{ m/s}$ 、水平位置より 30° おきの状態を示してある。なおこの場合、軸に負荷をとりつけてあるため、第3図で示した自励回転数 $S = 0.29$ より回転が遅く $S = 0.23$ であった。 α が増すにつれ上側では回転と同じ正方向の渦を後方に放出するのに対して下側でも回転と逆向きの渦をつくる。そして1回転につき正負各2個ずつの渦が交互に後流に放出される。回転方向と同じ向き渦が強いが、これは熱線流速計において流速変動の大きい側と対応する。これらの写真は $X = -30 \text{ cm}$ の線上の9点を通る流脈のある位相位置における像を表すものであるが、線が2本見られるのは、ストロボ照明を1回転につき2回行っていることによる。すなわち回転角 α と $\alpha + 180^\circ$ の場合では流れ場

 $\alpha = 0^\circ$  $\alpha = 30^\circ$  $\alpha = 60^\circ$  $\alpha = 90^\circ$  $\alpha = 120^\circ$  $\alpha = 150^\circ$

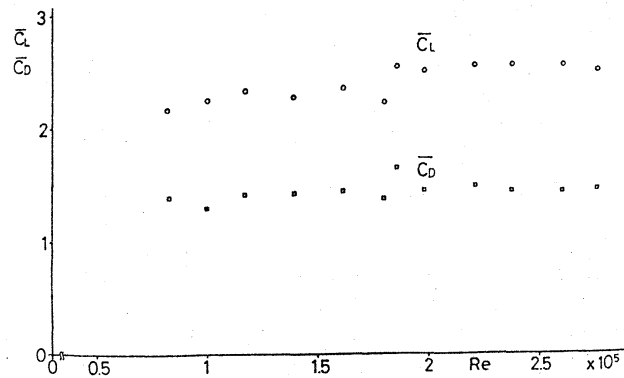
第5図 可視化写真 $U_0 = 10 \text{ m/s}$, 時計方向回転

 $\alpha = 0^\circ$  $\alpha = 90^\circ$

第6図 可視化写真 $U_0 = 10 \text{ m/s}$, $S = 0.075 \text{ r}^2$ 強制回転

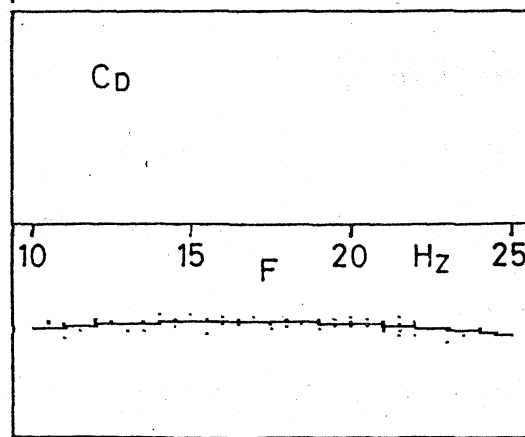
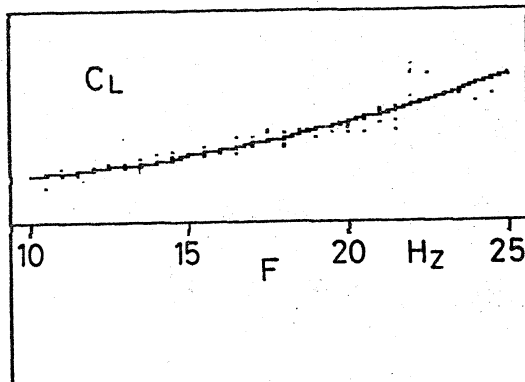
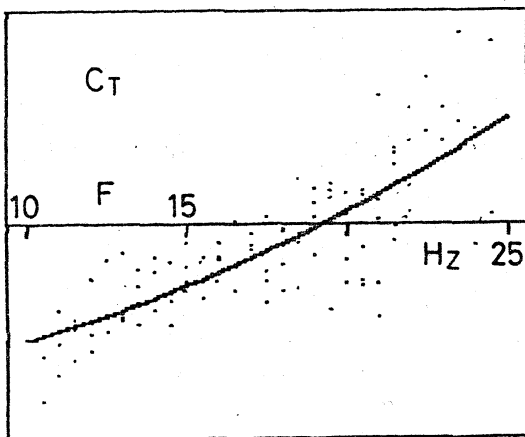
は異なることを意味し、流れ場は回転に対して biharmonic な構造をもつ。第6図は楕円柱をモーターで $S = 0.075$ の回転数で回転させた場合の写真で回転方向は同じく時計方向である。

回転が遅いため、正の大きな渦と負の小さな渦がいくつか発生している。回転方向が逆の場合にも全く対称な写真が得られた。



力の測定 自励回転 第7図 揚力・抵抗係数

している楕円柱に働く揚力、抵抗を第7図に示す。揚力係数、抵抗係数ともほぼ一定であり、 $C_L = 2.6$ $C_D = 1.4$ であり揚抗比は 1.5 となる。一様流速 $U_0 = 10 \text{ m/s}$ の場合



第8図 トルク・揚力・抵抗係数と回転数の関係

に楕円柱をモーターで強制的に定速回転させた場合の回転数に対するトルク、揚力、抵抗の変化を示したのが第8図である。トルクは回転方向と逆向きを正にとっているから、 C_T が負では回転を助けるトルクが働き、 C_T が正の部分では回転をまたげる方向に力が働く。したがって自励回転は $C_T = 0$ かつ C_T が回転数に対して正のこう配をもつ点において起こる。第8図では19Hzがこの点にあたり、これは $S = 0.285$ となり第3図で示した $S = 0.29$ と一致する。また回転数を増すと揚力は増すが、抵抗係数は回転数に無関係である。

角速度の変化 自励回転をしている楕円柱が一回転の間、一定の角速度で回転しているかどうかを調べるために、等間隔のスリットを切った端板をとりつけレーザを用いて各位相における回転角速度を測定した。しかし角速度の回転角位相による変化は検出されず、常に一定角速度で回転しているとみなすことができた。

4. 数値解析

解析方法 一様流速 U 中で流れと直角な固定軸の回りに回転する二次元楕円柱を考える。楕円柱に働く空気力の反時計方向のモーメントを M 、慣性回転モーメントを I とすると、楕円柱の運動方程式は、

$$I \frac{d\omega(t)}{dt} = -M(t), \quad \omega = \frac{d\alpha(t)}{dt} \quad (1)$$

となる。各時刻での空気力のモーメント M がわかれば、この式を積分することによって $\alpha(t)$, $\omega(t)$ が求まるが、(1) を α について積分し、 ω の周期平均値を $\bar{\omega}$, $\omega = \bar{\omega}$ となる回転角速度 $\bar{\omega}$ とすると、

$$\omega^2 = \bar{\omega}^2 - \frac{2}{I} \int_{\alpha}^{\alpha'} M d\alpha' \quad (2)$$

となる。つまり慣性モーメント I が十分に大きければ、 $\omega = \bar{\omega}$ となり、一定角速度で回転する。したがって逆に構内柱を一定角速度で回転させて、そのときの平均回転モーメントを求めると第8図のような関係が得られるであろう。そのとき平均回転モーメントが0で回転数に対して正のこう配をもつ点で自励回転が起こることになる。

計算方法 物体表面での渦層の発生とはく離の過程を渦糸近似法で扱う。コード長 C 、厚み比 ε の構内は写像関数

$$z = e^{-i\alpha} \left(A\zeta + \frac{B}{\zeta} \right) = G(\zeta, t) \quad (3)$$

$$A = (1 + \varepsilon)C/4, \quad B = (1 - \varepsilon)C/4$$

によって ζ 平面の単位円に写像される。タイムステップ N での流れ場を表す複素ポテンシャルは、

$$f^{(N)} = U_0 A \left(e^{-i\alpha} \zeta + \frac{e^{i\alpha}}{\zeta} \right) + iAB\omega \frac{1}{\zeta^2} + i \sum_{n=0}^N \sum_{m=1}^M \kappa_{nm} \left[\log(\zeta - \zeta_{nm}^{(N)}) - \log\left(\zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_{nm}^{(N)}}\right) \right] \quad (4)$$

ここで ω : 回転角速度、 N : タイムステップ (0, 1, 2, ...)。

M : 各タイムステップで楕円回りに発生させる渦系の数.

κ_{nm} : タイムステップ n で発生させた m 番目の渦系の強さ.

$z_{nm}^{(N)}$: タイムステップ n で発生させた m 番目の渦系のタイムステップ N での位置を表す. 渦系の強さは楕円表面にすべり無し条件を用いて決定した. 物体表面での物体速度と流体速度の差の接線成分 $= 0$ より.

$$g_m(z \frac{\partial f^{(N)}}{\partial z}) = g_m(z \frac{\partial G}{\partial z} \frac{\partial \bar{G}}{\partial t}), \quad |z| = 1 \quad (5)$$

となる. 各渦系が代表する区間で積分して得られる M 個の連立方程式.

$$\Phi_{z=\hat{z}_{m+1}}^{(N)} - \Phi_{z=\hat{z}_m}^{(N)} = - \int_{\text{Arg}(\hat{z}_m)}^{\text{Arg}(\hat{z}_{m+1})} g_m(z \frac{\partial G}{\partial z} \frac{\partial \bar{G}}{\partial t}) d\theta; \quad m=1, \dots, M \quad (6)$$

$$\Phi^{(N)} = \text{Re}(f^{(N)})$$

$$\hat{z}_m = \exp\left\{\frac{i}{2}[\text{Arg}(z_{nm}^{(n)}) + \text{Arg}(z_{n,m+1}^{(n)})]\right\}$$

$$\text{Arg}(\hat{z}_{m+1}) = \text{Arg}(\hat{z}_1) + 2\pi$$

を解くことにより κ_{nm} を決定する. 渦系によって誘導される速度が大きくなり誤差を生じるのを避けるために, 各渦系がコアをもつと考える. 渦系によって誘導される速度を.

$$v_\theta = \begin{cases} \kappa \frac{1}{r} & (r \geq r^*) \\ \kappa \frac{r}{r^{*2}} & (r < r^*) \end{cases} \quad (7)$$

$$r^* = 2.24 \sqrt{\nu t}$$

とする. これは粘性による拡散の効果を定性的にとり入れた

とみなすことができる。渦糸のタイムステップ $N+1$ での位置は、

$$\zeta_{nm}^{(N+1)} = \zeta_{nm}^{(N)} + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)_{nm}^{(N)} \Delta t \quad (8)$$

で求める。構内柱に働く力は、非定常のブラジウスの式、

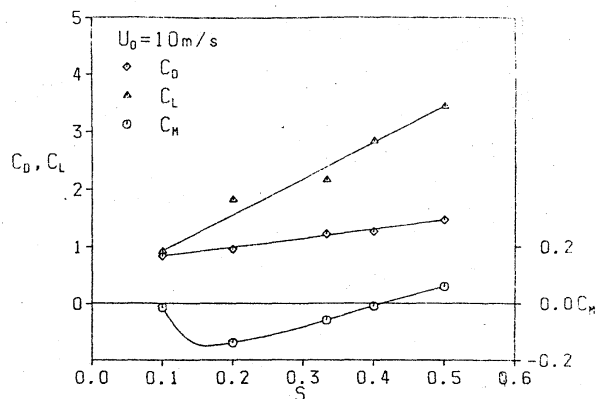
$$D - iL = \frac{1}{2} i\rho \int \left(\frac{df}{dz}\right)^2 dz - i\rho \frac{d}{dt} \int \bar{z} df \quad (9)$$

$$M = -\frac{1}{2} \rho \operatorname{Re} \int \left(\frac{df}{dz}\right)^2 z dz + \frac{1}{2} \rho \operatorname{Re} \frac{d}{dt} \int z \bar{z} df \quad (10)$$

より求める。計算は $M=2$, $\zeta_{n1}^{(n)}=1.1$, $\zeta_{n2}^{(n)}=-1.1$, $U_0=10 \text{ m/s}$, $C=15 \text{ cm}$, $\varepsilon=0.15$, $\nu=0.15 \text{ cm}^2/\text{s}$, $\Delta t=T/60$ (T : 回転周期) と 17 行った。

5. 計算結果

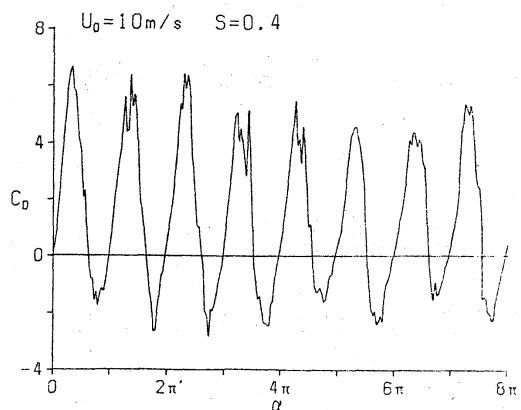
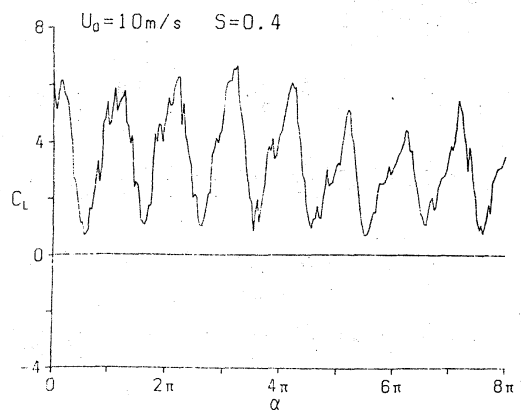
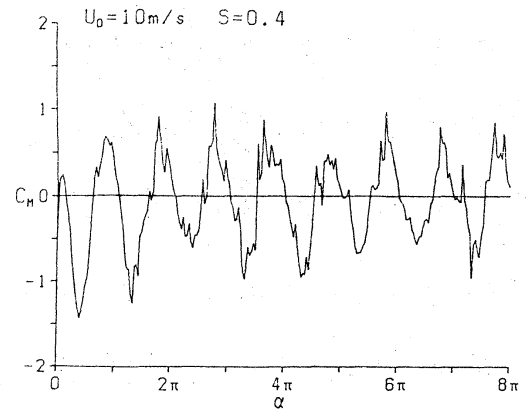
第9図は回転数 S を変えたときの平均の揚力、抵抗、モーメント係数の変化を示したものである。負荷がない場合、平均モーメントが0になりかつ傾きが正である点 $S=0.4$ において自励回転が起こる。負荷がある場合には、負荷曲線との交点が C_m が最小の $S=0.15$ より $S=0.4$ の間に存在するところの点での回転数で自励回転する。負荷がさらに大きくなると交点が存在しないときには自励回転は起こらない。実験においては $S=0.36$ であつたが、その差がバ



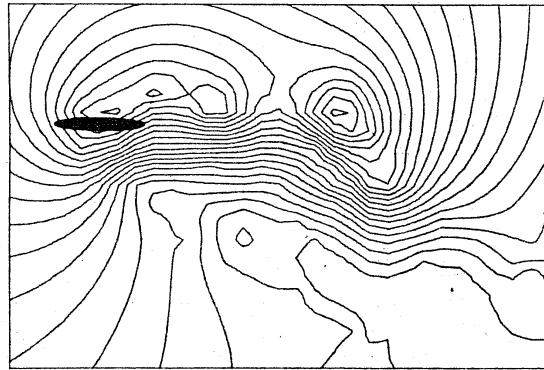
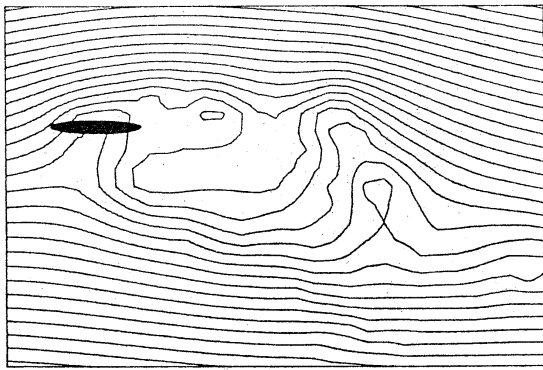
第9図 力の係数～回転数

リングの摩擦による負荷に相当すると考えられる。このときの抵抗係数 $C_D = 1.3$ 、揚力係数 $C_L = 2.8$ で実験と一致する。自由な自励回転が起こる $S = 0.4$ におけるモーメント、揚力、抵抗の時間変化を第10図に示す。揚力は常に正であり、抵抗は負の部分すなわち推力の生じる区間がある。

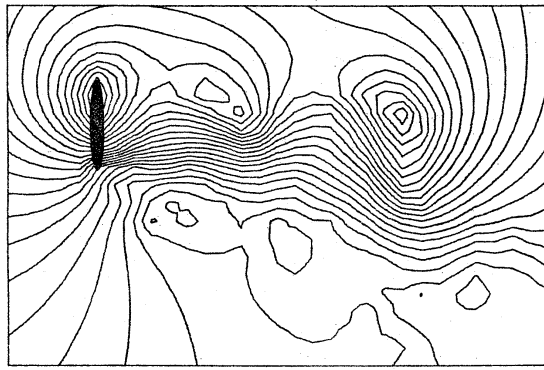
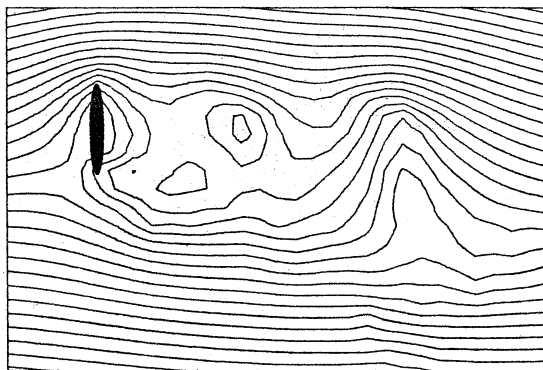
$S = 0.4$ の場合の瞬間流線を第11図に示す。右側は一樣流をさしひいて渦に着目するようにしたもので、計算開始後の3回転目より15ステップごとを示してある。可視化写真と比較すると渦の配列や大小、関係がよく一致している。また回転角 α と $\alpha + 180^\circ$ の場合を比較すると流線は異っており、前に述べた biharmonic な構造が計算においても認められる。第12図は回転が遅い $S = 0.1$ の場合で第6図の可視化写真とよく一致している。



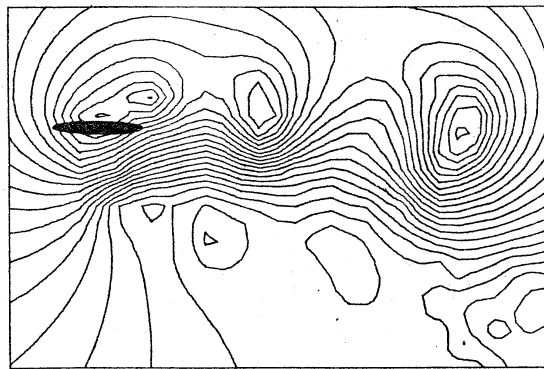
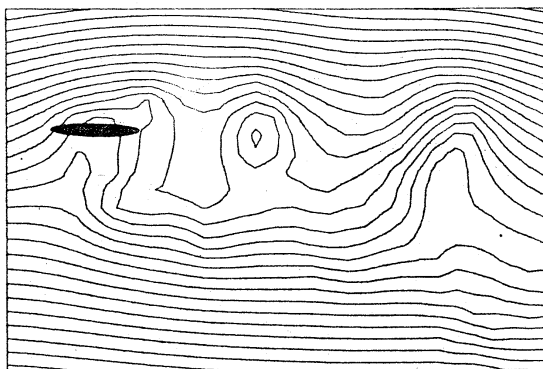
第10図 力の係数の時間変化



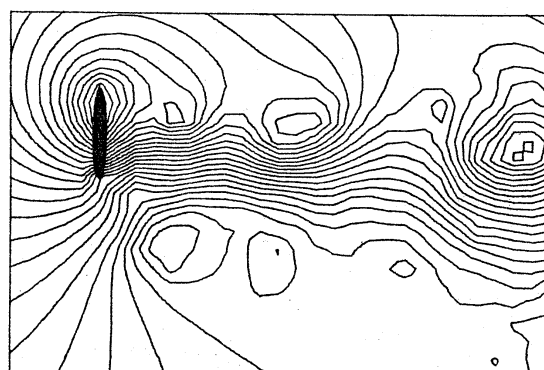
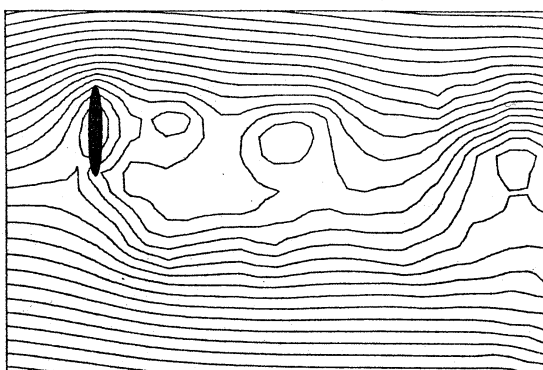
タイムステップ $n = 180$



$n = 195$

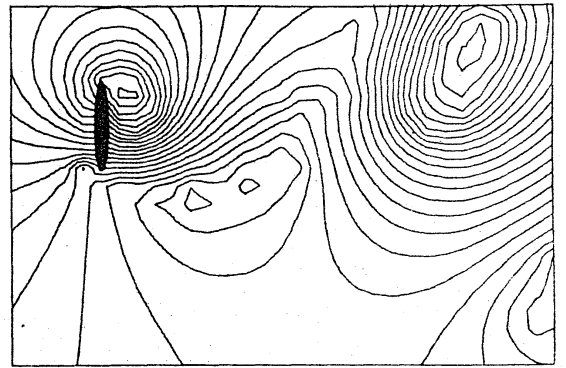
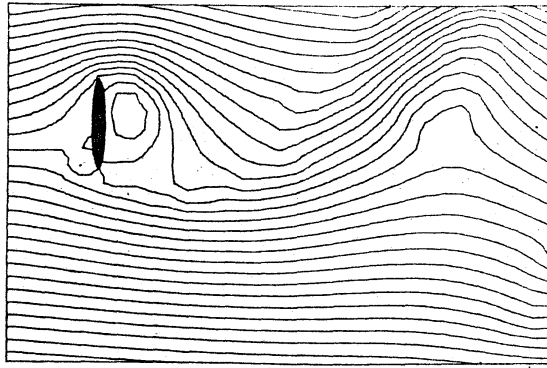


$n = 210$

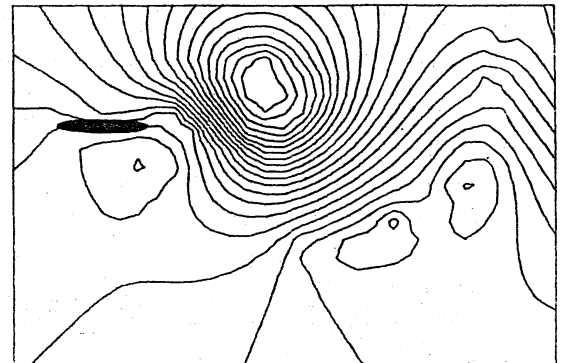
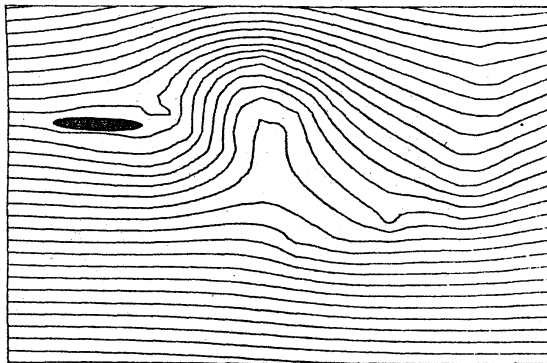


$n = 225$

第11図 瞬間流線 $S = 0.4$

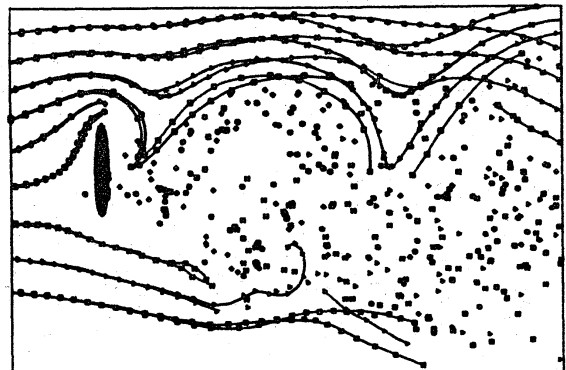
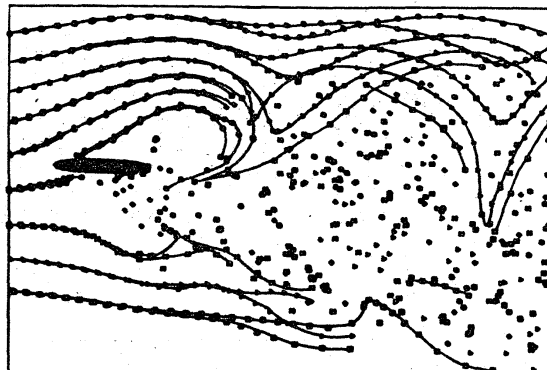


タイムステップ $n=125$

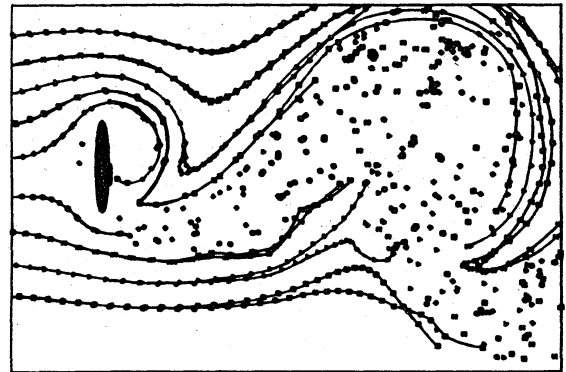
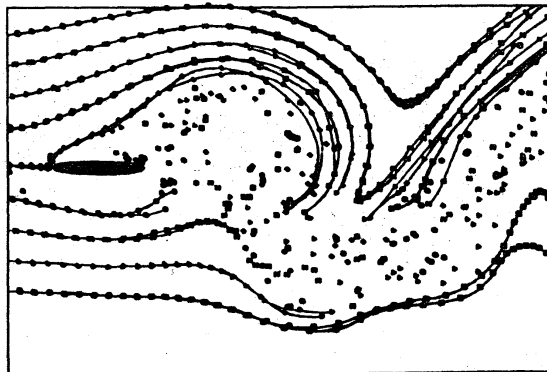


第12図 瞬間流線 $S=0.1$

$n=150$



第13図 流脈 $S=0.2$



第14図 流脈 $S=0.1$

第13、14図は可視化と同じ位置を通る流脈を計算したもので、 α と $\alpha + 180^\circ$ の場合を同じ図に示してある。それぞれ $S=0.2$ 、 $S=0.1$ の場合で可視化写真第5、6図に対応する。写真で見られるのと同じ二本の線があり、したがってこのような流脈の double traceが生じるのは流れ場が第11図に示したような biharmonic な構造をもつたためであると言える。

6. おわりに

ここでは、流れ場の biharmonic な構造について述べ、実験と計算の一致を示したが、回転数によれば、回転に対する2倍のモードだけに限らず、速い回転の場合は n 倍のモードが、また非常に遅い回転の場合には逆に $1/n$ のモードが存在すると思われる。実際第6図のように遅い回転の場合に負の渦が1回転で4つ発生しており $1/2$ のモードが存在し、sub-harmonic な構造をもつと考えることができる。このような構造は、楕円柱近傍では回転に同期した渦が発生するが、後流ではある固有の周波数に近づくために生じるロッキングの現象を示していると思われる。これを調べるためには、さらに下流に至るまでの広い領域での大規模な計算が必要であり、今後の課題である。

参考文献

D.P.Riabouchinsky: Thirty years of theoretical and experimental research in fluid mechanics, J.Roy.Aero.Soc., 35, 1935, pp282-348.

E.H.Smith: Autorotating wings: an experimental investigation, J.Fluid Mech., 50, 1971, pp513-534.

J.D.Iversen: Autorotating flat-plate wings: the effect of the moment of inertia, geometry and Reynolds number, J.Fluid Mech., 92, 1979, pp327-348.

H.J.Iugt: Autorotation of elliptic cylinder about an axis perpendicular to the flow, J.Fluid Mech., 99, 1980, pp817-840.